

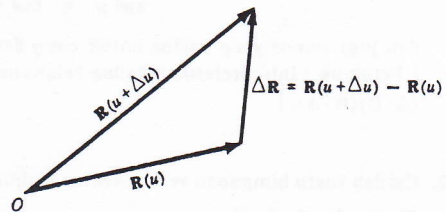
Bab 3

DIFERENSIASI VEKTOR

TURUNAN BIASA DARI VEKTOR. Misalkan $\mathbf{R}(u)$ sebuah vektor yang bergantung pada sebuah variabel skalar

tunggal u . Maka
$$\frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

di mana Δu menunjukkan suatu pertambahan dalam u (lihat gambar disamping).



Turunan biasa dari vektor $\mathbf{R}(u)$ terhadap skalar u diberikan oleh

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

jika limitnya ada.

Karena $\frac{d\mathbf{R}}{du}$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada u , kita dapat meninjau turunannya terhadap u .

Jika turunan ini ada, ia dinyatakan oleh $\frac{d^2 \mathbf{R}}{du^2}$. Dengan cara yang sama dibahas turunan dengan orde lebih tinggi.

KURVA - KURVA RUANG. Bila $\mathbf{r}(u)$ adalah vektor kedudukan $\mathbf{r}(u)$ yang menghubungkan titik asal O dari suatu sistem koordinat dan sebarang titik (x, y, z) , maka

$$\mathbf{r}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$$

dan spesifikasi fungsi vektor $\mathbf{r}(u)$ mendefinisikan x , y dan z sebagai fungsi-fungsi dari u .

Bila u berubah, titik terminal \mathbf{r} menggambarkan sebuah *kurva ruang* yang memiliki persamaan-persamaan parameter

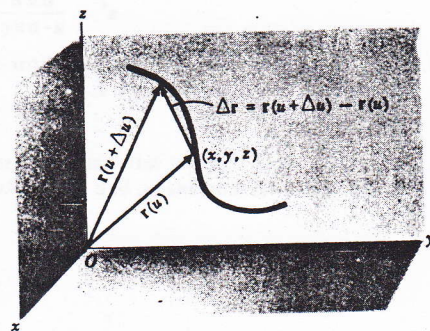
$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

Maka
$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u)}{\Delta u}$$
 adalah

sebuah vektor yang searah dengan $\Delta \mathbf{r}$ (lihat gambar disamping).

Jika $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{d\mathbf{r}}{du}$ ada, maka limitnya akan berupa sebuah vektor yang searah dengan arah garis-singgung pada kurva ruang di (x, y, z) dan diberikan oleh

$$\frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$



Bila u adalah waktu t , maka $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ menyatakan *kecepatan* \mathbf{V} yang mana dengannya titik-terminal dari \mathbf{r} menggambarkan kurvanya. Dengan cara yang sama, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ menyatakan *percepatan* \mathbf{a} sepanjang kurva.

KONTINUITAS DAN DIFERENSIABILITAS. Sebuah fungsi skalar $\phi(u)$ disebut *kontinu* di u jika $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \phi(u + \Delta u) = \phi(u)$. Ekuivalen dengan ini, $\phi(u)$ kontinu di u jika untuk setiap bilangan positif ϵ kita dapat memperoleh bilangan positif δ sehingga

$$|\phi(u + \Delta u) - \phi(u)| < \epsilon \quad \text{apabila} \quad |\Delta u| < \delta.$$

Sebuah fungsi vektor $\mathbf{R}(u) = R_1(u)\mathbf{i} + R_2(u)\mathbf{j} + R_3(u)\mathbf{k}$ disebut *kontinu* di u jika ketiga fungsi skalar $R_1(u)$, $R_2(u)$ dan $R_3(u)$ kontinu di u atau jika $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \mathbf{R}(u + \Delta u) = \mathbf{R}(u)$. Ekuivalen dengan ini, $\mathbf{R}(u)$ kontinu

di u jika untuk setiap bilangan positif ϵ kita dapat menemukan bilangan positif δ sehingga

$$|\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)| < \epsilon \quad \text{apabila} \quad |\Delta u| < \delta.$$

Sebuah fungsi vektor atau skalar dari u disebut *diferensiabel berorde n* jika turunan ke- n -nya ada. Sebuah fungsi yang diferensiabel haruslah kontinu tetapi sebaliknya tidak berlaku. Bila tidak ada pernyataan lainnya, maka kita menganggap bahwa semua fungsi yang ditinjau adalah diferensiabel hingga orde yang diperlukan dalam pembahasan.

RUMUS DIFERENSIASI. Jika \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar u yang diferensiabel dan ϕ sebuah fungsi skalar dari u yang diferensiabel, maka

1. $\frac{d}{du}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du}$
2. $\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B}$
3. $\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$
4. $\frac{d}{du}(\phi \mathbf{A}) = \phi \frac{d\mathbf{A}}{du} + \frac{d\phi}{du} \mathbf{A}$
5. $\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$
6. $\frac{d}{du} \{ \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \} = \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du}) + \mathbf{A} \times (\frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$

Urutan dalam hasil-kali hasil-kali ini penting.

TURUNAN PARSIAL DARI VEKTOR-VEKTOR. Jika \mathbf{A} adalah sebuah vektor yang bergantung pada lebih daripada satu variabel skalar, katakan x, y, z misalnya, maka kita tuliskan $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$. Turunan parsial dari \mathbf{A} terhadap x didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x + \Delta x, y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$

jika limitnya ada. Begitupula,

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x, y + \Delta y, z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(x, y, z + \Delta z) - \mathbf{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

adalah masing-masing turunan parsial dari \mathbf{A} terhadap y dan z jika limitnya ada.

Pernyataan kontinuitas dan diferensiabilitas untuk fungsi-fungsi dari satu variabel dapat diperluas bagi fungsi-fungsi dari dua atau lebih variabel. Misalnya, $\phi(x, y)$ dikatakan kontinu di (x, y) jika $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \phi(x + \Delta x, y + \Delta y) = \phi(x, y)$, atau bila untuk setiap bilangan positif ϵ kita dapat menemukan bilangan positif δ sehingga $|\phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \phi(x, y)| < \epsilon$ apabila $|\Delta x| < \delta$ dan $|\Delta y| < \delta$. Definisi yang sama berlaku pula untuk fungsi-fungsi vektor.

Untuk fungsi-fungsi dari dua atau lebih variabel kita menggunakan istilah *diferensiabel* (*differentiable*) dengan pengertian bahwa fungsinya memiliki turunan-turunan parsial pertama yang kontinu. (Istilah ini dipergunakan oleh yang lainnya dalam pengertian yang agak lebih lunak).

Turunan-turunan yang lebih tinggi dapat didefinisikan seperti dalam kalkulus. Jadi, misalnya,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right), & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right), & \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right), & \frac{\partial^3 \mathbf{A}}{\partial x \partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Jika \mathbf{A} memiliki sekurang-kurangnya turunan-turunan parsial orde kedua yang kontinu, maka $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}$,

yakni urutan diferensiasinya tidaklah menjadi persoalan.

Aturan-aturan untuk turunan parsial dari vektor-vektor mirip dengan yang dipergunakan dalam kalkulus elementer dari fungsi-fungsi skalar. Jadi jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah fungsi-fungsi dari x, y, z maka, misalnya,

1. $\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B}$
2. $\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{B}$
3. $\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \mathbf{B} \right\} \\ &= \mathbf{A} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} \cdot \mathbf{B}, \text{ dan seterusnya.} \end{aligned}$

DIFERENSIAL DARI VEKTOR-VEKTOR mengikuti aturan-aturan yang mirip dengan yang dari kalkulus elementer. Misalnya,

1. Jika $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$, maka $d\mathbf{A} = dA_1 \mathbf{i} + dA_2 \mathbf{j} + dA_3 \mathbf{k}$
2. $d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$
3. $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times d\mathbf{B} + d\mathbf{A} \times \mathbf{B}$
4. Jika $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$, maka $d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} dz$, dst.

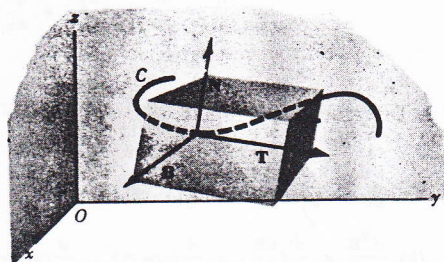
GEOMETRI DIFERENSIAL menyangkut studi terhadap kurva-kurva ruang dan permukaan-permukaan. Bila C adalah sebuah kurva ruang yang didefinisikan oleh kurva $\mathbf{r}(u)$, maka kita telah me-

lihat bahwa $\frac{d\mathbf{r}}{du}$ adalah sebuah vektor yang searah dengan garis-singgung pada C . Jika skalar u diambil sebagai panjang busur s yang diukur dari suatu titik pada C maka $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ adalah sebuah vektor singgung satuan pada C dan

dinyatakan dengan \mathbf{T} (lihat gambar dibawah). Laju perubahan \mathbf{T} terhadap s adalah ukuran dari kelengkungan C dan diberikan oleh $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$. Arah dari $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$ pada sebarang titik

pada C adalah normal terhadap kurva pada titik tersebut (lihat Soal 9). Jika \mathbf{N} adalah sebuah vektor satuan dalam arah normal ini, maka ia disebut *normal utama* (prin-

cipal normal) pada kurva. Jadi $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$, di mana κ disebut *kelengkungan* (*curvature*) dari C pada titik yang di-spesifikasikan. Besaran $\rho = 1/\kappa$ disebut *jejari kelengkungan* (*radius of curvature*).



Vektor satuan \mathbf{B} yang tegak-lurus pada bidang dari \mathbf{T} dan \mathbf{N} dan sedemikian rupa sehingga $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, disebut *binormal* terhadap kurva. Dari sini diperoleh bahwa $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ membentuk sebuah sistem koordinat tegak-lurus tangan-kanan lokal pada sebarang titik dari C . Sistem koordinat ini disebut *trihedral* atau *triad* pada titik yang ditinjau. Bila s berubah, maka sistem koordinatnya bergerak dan dikenal sebagai *trihedral bergerak*.

Himpunan relasi-relasi yang mengandung turunan-turunan dari vektor-vektor fundamental \mathbf{T}, \mathbf{N} dan \mathbf{B} secara kolektif dikenal sebagai *rumus Frenet-Serret* yang diberikan oleh

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = \tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

di mana τ adalah sebuah skalar yang disebut *torsi* (*torsion*). Besaran $\sigma = 1/\tau$ disebut *jejari torsi* (*radius of torsion*).

Bidang oskulasi (*osculating plane*) pada sebuah kurva dititik P adalah bidang yang mengandung vektor satuan singgung dan normal utama di P . *Bidang normal* adalah bidang yang melalui P dan tegak-lurus vektor satuan singgung. *Bidang yang meralat* (*rectifying plane*) adalah bidang yang melalui P dan tegak-lurus normal utama.

MEKANIKA menyangkut studi terhadap gerak partikel sepanjang kurva-kurva, studi ini dikenal sebagai *kine-matika*. Dalam hubungan ini beberapa hasil dari geometri diferensial dapat mempunyai arti.

Studi terhadap gaya-gaya pada obyek-obyek yang bergerak ditinjau dalam *dinamika*. Yang mendasar dalam studi ini adalah hukum Newton yang terkenal yang menyatakan bahwa jika \mathbf{F} adalah gaya total yang bekerja pada sebuah obyek bermassa m yang bergerak dengan kecepatan \mathbf{v} , maka

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

di mana $m\mathbf{v}$ adalah momentum dari obyek. Jika m konstan, maka rumus ini menjadi $\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}$, di mana \mathbf{a} adalah percepatan dari obyek.

Soal-soal yang Dipecahkan

1. Jika $\mathbf{R}(u) = x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}$, di mana x, y , dan z fungsi-fungsi diferensiabel dari sebuah skalar u ,

buktikan bahwa
$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}.$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{R}(u + \Delta u) - \mathbf{R}(u)}{\Delta u}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{[x(u+\Delta u)\mathbf{i} + y(u+\Delta u)\mathbf{j} + z(u+\Delta u)\mathbf{k}] - [x(u)\mathbf{i} + y(u)\mathbf{j} + z(u)\mathbf{k}]}{\Delta u} \\
&= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u} \mathbf{i} + \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u} \mathbf{j} + \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u} \mathbf{k} \\
&= \frac{dx}{du} \mathbf{i} + \frac{dy}{du} \mathbf{j} + \frac{dz}{du} \mathbf{k}
\end{aligned}$$

2. Diketahui $\mathbf{R} = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, Carilah (a) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$, (b) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$, (c) $\left| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|$, (d) $\left| \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right|$.

$$(a) \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{i} + \frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(t)\mathbf{k} = \cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$(b) \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\cos t)\mathbf{i} - \frac{d}{dt}(\sin t)\mathbf{j} + \frac{d}{dt}(1)\mathbf{k} = -\sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}$$

$$(c) \left| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right| = \sqrt{(\cos t)^2 + (-\sin t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$(d) \left| \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (-\cos t)^2} = 1$$

3. Sebuah partikel bergerak sepanjang sebuah kurva yang persamaan parameternya adalah $x = e^{-t}$, $y = 2 \cos 3t$, $z = 2 \sin 3t$, di mana t adalah waktu.

(a) Tentukan kecepatan dan percepatannya pada sebarang saat.

(b) Carilah besar dari kecepatan dan percepatan pada $t = 0$.

(a) Vektor kedudukan \mathbf{r} dari partikel adalah $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = e^{-t}\mathbf{i} + 2 \cos 3t \mathbf{j} + 2 \sin 3t \mathbf{k}$.

$$\text{Maka kecepatannya } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -e^{-t}\mathbf{i} - 6 \sin 3t \mathbf{j} + 6 \cos 3t \mathbf{k}$$

$$\text{dan percepatannya } \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e^{-t}\mathbf{i} - 18 \cos 3t \mathbf{j} - 18 \sin 3t \mathbf{k}$$

(b) Pada $t = 0$, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$ dan $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{i} - 18\mathbf{j}$. Maka

$$\text{besarnya kecepatan pada } t = 0 \text{ adalah } \sqrt{(-1)^2 + (6)^2} = \sqrt{37}$$

$$\text{besarnya percepatan pada } t = 0 \text{ adalah } \sqrt{(1)^2 + (-18)^2} = \sqrt{325}.$$

4. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$, di mana t adalah waktu. Carilah komponen-komponen kecepatan dan percepatannya pada saat $t = 1$ dalam arah $\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

$$\begin{aligned}
\text{Kecepatan} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[2t^2\mathbf{i} + (t^2 - 4t)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}] \\
&= 4t\mathbf{i} + (2t - 4)\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ pada } t = 1.
\end{aligned}$$

$$\text{Vektor satuan dalam arah } \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \text{ adalah } \frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (2)^2}} = \frac{\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{14}}.$$

Maka komponen kecepatan dalam arah yang diberikan adalah

$$\frac{(4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (-2)(-3) + (3)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} = \frac{8\sqrt{14}}{7}$$

$$\text{Percepatan} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}[4t\mathbf{i} + (2t - 4)\mathbf{j} + 3\mathbf{k}] = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}.$$

Maka komponen percepatan pada arah yang diberikan adalah

$$\frac{(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})}{\sqrt{14}} = \frac{(4)(1) + (2)(-3) + (0)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{14}} = \frac{-\sqrt{14}}{7}$$

5. Sebuah kurva C didefinisikan oleh persamaan parameter $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, di mana s adalah panjang busur C diukur dari suatu titik tetap pada C . Bila \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari sebarang titik pada C , perlihatkan bahwa $d\mathbf{r}/ds$ adalah vektor singgung satuan pada C .

Vektor $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}$ menyinggung kurva $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$. Untuk memperlihatkan bahwa ia adalah vektor satuan, kita perhatikan bahwa

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1$$

karena dari kalkulus $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$.

6. (a) Carilah vektor singgung satuan pada sebarang titik terhadap kurva $x = t^2 + 1$, $y = 4t - 3$, $z = 2t^2 - 6t$
 (b) Tentukan vektor singgung satuan ini pada titik di mana $t = 2$.

(a) Vektor singgung terhadap kurva pada sebarang titik adalah

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[(t^2 + 1)\mathbf{i} + (4t - 3)\mathbf{j} + (2t^2 - 6t)\mathbf{k}] = 2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t - 6)\mathbf{k}$$

$$\text{Vektor ini besarnya } \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t - 6)^2}.$$

$$\text{Maka vektor singgung satuan yang dikehendaki adalah } \mathbf{T} = \frac{2t\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (4t - 6)\mathbf{k}}{\sqrt{(2t)^2 + (4)^2 + (4t - 6)^2}}$$

$$\text{Perhatikan bahwa karena } \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt}, \text{ maka } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

$$(b) \text{ Pada } t = 2, \text{ vektor singgung satuan adalah } \mathbf{T} = \frac{4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{(4)^2 + (4)^2 + (2)^2}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} + \frac{1}{3}\mathbf{k}.$$

7. Jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah fungsi-fungsi skalar dari u yang diferensiabel, buktikan bahwa :

$$(a) \frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B}, \quad (b) \frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} (a) \frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{B}}{\Delta u} \\ &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \mathbf{A} \cdot \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} \cdot \mathbf{B} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} \cdot \Delta \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Metode lain. Misalkan $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$. Maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d}{du}(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \\ &= (A_1 \frac{dB_1}{du} + A_2 \frac{dB_2}{du} + A_3 \frac{dB_3}{du}) + (\frac{dA_1}{du}B_1 + \frac{dA_2}{du}B_2 + \frac{dA_3}{du}B_3) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$(b) \frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{A} + \Delta \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} + \Delta \mathbf{B}) - \mathbf{A} \times \mathbf{B}}{\Delta u}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A} \times \Delta \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \Delta \mathbf{A} \times \Delta \mathbf{B}}{\Delta u} \\
 &= \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \mathbf{A} \times \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta u} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} \times \mathbf{B} + \frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta u} \times \Delta \mathbf{B} = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}
 \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{du} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Penggunaan teorema diferensiasi dari determinan, maka hasil ini menjadi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ \frac{dA_1}{du} & \frac{dA_2}{du} & \frac{dA_3}{du} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{dA_1}{du} & \frac{dA_2}{du} & \frac{dA_3}{du} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$$

8. Jika $\mathbf{A} = 5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = \sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}$, carilah (a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, (b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (c) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A})$.

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} \\
 &= (5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}) \cdot (\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}) + (10t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}) \cdot (\sin t\mathbf{i} - \cos t\mathbf{j}) \\
 &= 5t^2 \cos t + t \sin t + 10t \sin t - \cos t = (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t
 \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 5t^2 \sin t - t \cos t. \quad \text{Maka}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \frac{d}{dt}(5t^2 \sin t - t \cos t) = 5t^2 \cos t + 10t \sin t + t \sin t - \cos t \\
 &= (5t^2 - 1) \cos t + 11t \sin t
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \cos t & \sin t & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 10t & 1 & -3t^2 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} \\
 &= [t^3 \sin t \mathbf{i} - t^3 \cos t \mathbf{j} + (5t^2 \sin t - t \cos t) \mathbf{k}] \\
 &\quad + [-3t^2 \cos t \mathbf{i} - 3t^2 \sin t \mathbf{j} + (-10t \cos t - \sin t) \mathbf{k}] \\
 &= (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t) \mathbf{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t) \mathbf{j} + (5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t) \mathbf{k}
 \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5t^2 & t & -t^3 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = -t^3 \cos t \mathbf{i} - t^3 \sin t \mathbf{j} + (-5t^2 \cos t - t \sin t) \mathbf{k}$$

$$\text{Maka } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (t^3 \sin t - 3t^2 \cos t) \mathbf{i} - (t^3 \cos t + 3t^2 \sin t) \mathbf{j} + (5t^2 \sin t - 11t \cos t - \sin t) \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \\
 &= 2(5t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - t^3\mathbf{k}) \cdot (10t\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}) = 100t^3 + 2t + 6t^5
 \end{aligned}$$

Metode lain.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (5t^2)^2 + (t)^2 + (-t^3)^2 = 25t^4 + t^2 + t^6$$

$$\text{Maka } \frac{d}{dt}(25t^4 + t^2 + t^6) = 100t^3 + 2t + 6t^5.$$

9. Jika \mathbf{A} besarnya tetap maka perhatikan bahwa \mathbf{A} dan $d\mathbf{A}/dt$ saling tegak-lurus asalkan $|d\mathbf{A}/dt| \neq 0$.

Karena \mathbf{A} besarnya tetap, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{konstan}$.

$$\text{Maka } \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0.$$

$$\text{Jadi } \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0 \text{ dan } \mathbf{A} \text{ tegak-lurus } \frac{d\mathbf{A}}{dt} \text{ asalkan } \left| \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right| \neq 0$$

10. Buktikan bahwa $\frac{d}{du}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, di mana $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ adalah fungsi-fungsi diferensiabel dari skalar u .

$$\begin{aligned} \text{Menurut Soal 7(a) dan 7(b), } \frac{d}{du} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \frac{d}{du} (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ &= \mathbf{A} \cdot \left[\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du} + \frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} \right] + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C} \end{aligned}$$

11. Hitunglah $\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2})$.

$$\begin{aligned} \text{Menurut 10, } \frac{d}{dt}(\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2}) &= \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + \mathbf{V} \cdot \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} \times \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{V}}{dt^2} \\ &= \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} + 0 + 0 = \mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} \times \frac{d^3\mathbf{V}}{dt^3} \end{aligned}$$

12. Vektor kedudukan dari sebuah partikel yang bergerak diberikan oleh $\mathbf{r} = \cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}$ di mana ω konstan. Perlihatkan bahwa (a) kecepatan \mathbf{v} dari partikel tegak-lurus \mathbf{r} , (b) percepatan \mathbf{a} arahnya menuju titik asal dan besarnya sebanding dengan jarak ke titik-asal, (c) $\mathbf{r} \times \mathbf{v} =$ vektor konstan.

$$(a) \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} &= [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] \cdot [-\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}] \\ &= (\cos \omega t)(-\omega \sin \omega t) + (\sin \omega t)(\omega \cos \omega t) = 0 \end{aligned}$$

jadi \mathbf{r} dan \mathbf{v} saling tegak-lurus.

$$\begin{aligned} (b) \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\omega^2 \cos \omega t \mathbf{i} - \omega^2 \sin \omega t \mathbf{j} \\ &= -\omega^2 [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] = -\omega^2 \mathbf{r} \end{aligned}$$

Jadi percepatan berlawanan arah dengan arahnya \mathbf{r} , yang berarti ia mengarah ke titik asal. Besarnya sebanding dengan $|\mathbf{r}|$ yang adalah jarak ke titik asal.

$$\begin{aligned} (c) \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}] \times [-\omega \sin \omega t \mathbf{i} + \omega \cos \omega t \mathbf{j}] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\omega \sin \omega t & \omega \cos \omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \mathbf{k} = \omega \mathbf{k}, \text{ sebuah vektor konstan.} \end{aligned}$$

Secara fisis, gerakannya adalah gerak sebuah partikel pada lingkaran dengan laju sudut ω yang tetap. Percepatannya yang mengarah ke pusat lingkaran, adalah *percepatan sentripetal*.

13. Buktikan : $\mathbf{A} \times \frac{d^2\mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} = \frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}) - \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B}$$

$$= \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{B}}{dt^2} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} - \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B} \right] = \mathbf{A} \times \frac{d^2 \mathbf{B}}{dt^2} - \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} \times \mathbf{B}$$

14. Perhatikan bahwa $\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt}$.

Misalkan $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{i} + A_2 \mathbf{j} + A_3 \mathbf{k}$. Maka $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$.

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2}(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2} (2A_1 \frac{dA_1}{dt} + 2A_2 \frac{dA_2}{dt} + 2A_3 \frac{dA_3}{dt}) \\ &= \frac{A_1 \frac{dA_1}{dt} + A_2 \frac{dA_2}{dt} + A_3 \frac{dA_3}{dt}}{(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{1/2}} = \frac{\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}}{A}, \quad \text{yang berarti } A \frac{dA}{dt} = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt}. \end{aligned}$$

Metode lain.

Karena $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{d}{dt}(A^2)$.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{A} = 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} \quad \text{dan} \quad \frac{d}{dt}(A^2) = 2A \frac{dA}{dt}$$

$$\text{Maka } 2\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 2A \frac{dA}{dt} \quad \text{atau} \quad \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = A \frac{dA}{dt}.$$

Perhatikan bahwa jika \mathbf{A} sebuah vektor konstan $\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0$ seperti dalam Soal 9.

15. Jika $\mathbf{A} = (2x^2y - x^4)\mathbf{i} + (e^{xy} - y \sin x)\mathbf{j} + (x^2 \cos y)\mathbf{k}$, carilah $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy} - y \sin x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cos y)\mathbf{k} \\ &= (4xy - 4x^3)\mathbf{i} + (ye^{xy} - y \cos x)\mathbf{j} + 2x \cos y \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y - x^4)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy} - y \sin x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cos y)\mathbf{k} \\ &= 2x^2 \mathbf{i} + (xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - x^2 \sin y \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(ye^{xy} - y \cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial x}(2x \cos y)\mathbf{k} \\ &= (4y - 12x^2)\mathbf{i} + (y^2 e^{xy} + y \sin x)\mathbf{j} + 2 \cos y \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 \sin y)\mathbf{k} \\ &= 0 + x^2 e^{xy} \mathbf{j} - x^2 \cos y \mathbf{k} = x^2 e^{xy} \mathbf{j} - x^2 \cos y \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy} - \sin x)\mathbf{j} - \frac{\partial}{\partial x}(x^2 \sin y)\mathbf{k} \\ &= 4x \mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x \sin y \mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy - 4x^3)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(ye^{xy} - y \cos x)\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial y}(2x \cos y)\mathbf{k} \\ &= 4x \mathbf{i} + (xye^{xy} + e^{xy} - \cos x)\mathbf{j} - 2x \sin y \mathbf{k} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}$, yakni urutan diferensiasi tidak dipermasalahkan. Hal ini pada umumnya berlaku apabila A memiliki sekurang-kurangnya turunan-turunan parsial orde kedua yang kontinu.

16. Jika $\phi(x, y, z) = xyz$ dan $A = xzi - xy^2j + yz^2k$, carilah $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi A)$ pada titik $(2, -1, 1)$.

$$\phi A = (xyz)(xzi - xy^2j + yz^2k) = x^2y^2z^2i - x^2y^4zj + xy^3z^3k$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2z^2i - x^2y^4zj + xy^3z^3k) = 2x^2y^2zi - x^2y^4j + 3xy^3z^2k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y^2zi - x^2y^4j + 3xy^3z^2k) = 4xy^2zi - 2xy^4j + 3y^3z^2k$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}(\phi A) = \frac{\partial}{\partial x}(4xy^2zi - 2xy^4j + 3y^3z^2k) = 4y^2zi - 2y^4j$$

Jika $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ ini menjadi $4(-1)^2(1)i - 2(-1)^4j = 4i - 2j$.

17. Misalkan F bergantung pada x, y, z, t di mana x, y , dan z bergantung pada t . Buktikan bahwa

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

di bawah anggapan diferensiabilitas yang sesuai.

Misalkan bahwa $F = F_1(x, y, z, t)i + F_2(x, y, z, t)j + F_3(x, y, z, t)k$. Maka

$$\begin{aligned} dF &= dF_1 i + dF_2 j + dF_3 k \\ &= \left[\frac{\partial F_1}{\partial t} dt + \frac{\partial F_1}{\partial x} dx + \frac{\partial F_1}{\partial y} dy + \frac{\partial F_1}{\partial z} dz \right] i + \left[\frac{\partial F_2}{\partial t} dt + \frac{\partial F_2}{\partial x} dx + \frac{\partial F_2}{\partial y} dy + \frac{\partial F_2}{\partial z} dz \right] j \\ &\quad + \left[\frac{\partial F_3}{\partial t} dt + \frac{\partial F_3}{\partial x} dx + \frac{\partial F_3}{\partial y} dy + \frac{\partial F_3}{\partial z} dz \right] k \\ &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} i + \frac{\partial F_2}{\partial t} j + \frac{\partial F_3}{\partial t} k \right) dt + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} i + \frac{\partial F_2}{\partial x} j + \frac{\partial F_3}{\partial x} k \right) dx \\ &\quad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} i + \frac{\partial F_2}{\partial y} j + \frac{\partial F_3}{\partial y} k \right) dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} i + \frac{\partial F_2}{\partial z} j + \frac{\partial F_3}{\partial z} k \right) dz \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \end{aligned}$$

dan dengan demikian $\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$.

GEOMETRI DIFERENSIAL.

18. Buktikan rumus Frenet-Serret (a) $\frac{dT}{ds} = \kappa N$, (b) $\frac{dB}{ds} = -\tau N$, (c) $\frac{dN}{ds} = \tau B - \kappa T$.

(a) Karena $T \cdot T = 1$, maka dari Soal 9 didapatkan bahwa $T \cdot \frac{dT}{ds} = 0$, yang berarti $\frac{dT}{ds}$ tegak-lurus

Jika N sebuah vektor satuan dalam arah $\frac{dT}{ds}$, maka $\frac{dT}{ds} = \kappa N$. Kita menyebut N *normal utama*,

K kelengkungan dan $\rho = 1/K$ jejari kelengkungan.

(b) Misalkan $B = T \times N$, maka $\frac{dB}{ds} = T \times \frac{dN}{ds} + \frac{dT}{ds} \times N = T \times \frac{dN}{ds} + \kappa N \times N = T \times \frac{dN}{ds}$

Maka $\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \times \frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$, jadi \mathbf{T} tegak lurus $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$

Tetapi dari $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1$ kita dapatkan bahwa $\mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} = 0$ (Soal 9), jadi $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ tegak-lurus \mathbf{B} dan terletak dalam bidang dari \mathbf{T} dan \mathbf{N}

Karena $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$ terletak dalam bidang dari \mathbf{T} dan \mathbf{N} dan tegak-lurus \mathbf{T} , maka ia haruslah sejajar \mathbf{N} ; maka $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}$. Kita menyebut \mathbf{B} *binormal*, τ *torsi* dan $\sigma = 1/\tau$ *jejari-torsi*.

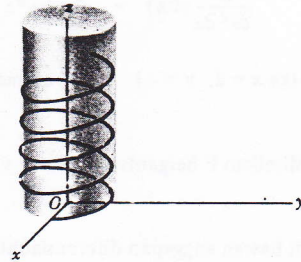
(c) Karena $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ membentuk suatu sistem tangan kanan, maka demikian pula \mathbf{N}, \mathbf{B} dan \mathbf{T} , yakni $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$.

Maka $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{T}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \times \mathbf{T} = \mathbf{B} \times \kappa \mathbf{N} - \tau \mathbf{N} \times \mathbf{T} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} = \tau \mathbf{B} - \kappa \mathbf{T}$.

19. Buatlah sketsa kurva ruang $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ dan carilah (a) vektor singgung satuan \mathbf{T} , (b) normal utama \mathbf{N} , kelengkungan K dan jejari kelengkungan ρ , (c) binormal \mathbf{B} , torsi τ dan jejari torsi σ .

Kurva ruangnya adalah *heliks lingkaran* (lihat gambar di samping). Karena $t = z/4$, persamaan kurvanya adalah $x = 3 \cos(z/4)$, $y = 3 \sin(z/4)$ jadi dengan demikian terletak pada permukaan silinder $x^2 + y^2 = 9$.

(a) Vektor kedudukan dari sebarang titik pada kurva adalah



$$\mathbf{r} = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}$$

$$\text{Maka } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -3 \sin t \mathbf{i} + 3 \cos t \mathbf{j} + 4 \mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{Jadi } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{5} \sin t \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cos t \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k}.$$

$$(b) \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{3}{5} \sin t \mathbf{i} + \frac{3}{5} \cos t \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k} \right) = -\frac{3}{5} \cos t \mathbf{i} - \frac{3}{5} \sin t \mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = -\frac{3}{25} \cos t \mathbf{i} - \frac{3}{25} \sin t \mathbf{j}$$

$$\text{Karena } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}, \quad \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = |\kappa| |\mathbf{N}| = \kappa \quad \text{as } \kappa \geq 0.$$

$$\text{Maka } \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \sqrt{\left(-\frac{3}{25} \cos t\right)^2 + \left(-\frac{3}{25} \sin t\right)^2} = \frac{3}{25} \quad \text{dan } \rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{25}{3}.$$

$$\text{Dari } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}, \text{ kita peroleh } \mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}.$$

$$(c) \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{3}{5} \sin t & \frac{3}{5} \cos t & \frac{4}{5} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{4}{5} \sin t \mathbf{i} - \frac{4}{5} \cos t \mathbf{j} + \frac{3}{5} \mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4}{5} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{5} \sin t \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4}{25} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{25} \sin t \mathbf{j}$$

$$-\tau \mathbf{N} = -\tau (-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}) = \frac{4}{25} \cos t \mathbf{i} + \frac{4}{25} \sin t \mathbf{j} \quad \text{atau } \tau = \frac{4}{25} \quad \text{dan } \sigma = \frac{1}{\tau} = \frac{25}{4}$$

20. Buktikan bahwa jejari kelengkungan dari kurva dengan persamaan parameter $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$

$$\text{diberikan oleh } \rho = \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Vektor kedudukan dari sebarang titik pada kurva adalah $\mathbf{r} = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$.

$$\text{Maka } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \quad \text{dan} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{ds^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{ds^2}\mathbf{k}.$$

Tetapi $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$ sehingga $\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2} \right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2} \right)^2}$ dan hasilnya langsung diperoleh karena $\rho = \frac{1}{\kappa}$

21. Perlihatkan bahwa $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{\tau}{\rho^2}$.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}, \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \kappa \frac{d\mathbf{N}}{ds} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa(\tau\mathbf{B} - \kappa\mathbf{T}) + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} = \kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} &= \mathbf{T} \cdot \kappa\mathbf{N} \times (\kappa\tau\mathbf{B} - \kappa^2\mathbf{T} + \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N}) \\ &= \mathbf{T} \cdot (\kappa^2\tau\mathbf{N} \times \mathbf{B} - \kappa^3\mathbf{N} \times \mathbf{T} + \kappa \frac{d\kappa}{ds}\mathbf{N} \times \mathbf{N}) = \mathbf{T} \cdot (\kappa^2\tau\mathbf{T} + \kappa^3\mathbf{B}) = \kappa^2\tau = \frac{\tau}{\rho^2} \end{aligned}$$

Dengan mempergunakan hasil dari Soal 20, maka hasil diatas dapat dituliskan sebagai berikut

$$\tau = [(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2]^{-1} \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

di mana tanda aksen menyatakan turunan terhadap s .

22. Diketahui kurva ruang $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2}{3}t^3$, carilah (a) kelengkungan K , (b) torsi τ

(a) Vektor kedudukannya adalah $\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$.

$$\text{Maka } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} = \sqrt{(1)^2 + (2t)^2 + (2t^2)^2} = 1 + 2t^2$$

$$\text{dan } \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}}{1 + 2t^2}.$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{(1 + 2t^2)(2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) - (\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k})(4t)}{(1 + 2t^2)^2} = \frac{-4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^2}$$

$$\text{Maka } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{-4t\mathbf{i} + (2 - 4t^2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}}{(1 + 2t^2)^3}.$$

$$\text{Karena } \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}, \quad \kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{\sqrt{(-4t)^2 + (2 - 4t^2)^2 + (4t)^2}}{(1 + 2t^2)^3} = \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}$$

$$(b) \text{ Dari (a), } \mathbf{N} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{-2t\mathbf{i} + (1 - 2t^2)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}}{1 + 2t^2}$$

$$\text{Maka } \mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{1}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} & \frac{2t^2}{1+2t^2} \\ \frac{-2t}{1+2t^2} & \frac{1-2t^2}{1+2t^2} & \frac{2t}{1+2t^2} \end{vmatrix} = \frac{2t^2 \mathbf{i} - 2t \mathbf{j} + \mathbf{k}}{1+2t^2}$$

$$\text{Sekarang } \frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{4t \mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t \mathbf{k}}{(1+2t^2)^2} \quad \text{dan} \quad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = \frac{d\mathbf{B}/dt}{ds/dt} = \frac{4t \mathbf{i} + (4t^2 - 2)\mathbf{j} - 4t \mathbf{k}}{(1+2t^2)^3}$$

$$\text{Juga, } -\tau \mathbf{N} = -\tau \left[\frac{-2t \mathbf{i} + (1-2t^2)\mathbf{j} + 2t \mathbf{k}}{1+2t^2} \right], \text{ Karena } \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N}, \text{ kita dapatkan } \tau = \frac{2}{(1+2t^2)^2}$$

Perhatikan bahwa $K = \tau$ untuk kurva ini.

23. Carilah persamaan-persamaan dalam bentuk vektor dan koordinat tegak-lurus untuk (a) vektor singgung satuan, (b) normal utama, dan (c) binormal terhadap kurva dari Soal 22 pada titik di mana $t = 1$.

Misalkan \mathbf{T}_0 , \mathbf{N}_0 dan \mathbf{B}_0 menunjukkan vektor-vektor satuan singgung, normal utama dan binormal pada titik yang dikehendaki. Maka dari Soal 22,

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}, \quad \mathbf{N}_0 = \frac{-2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{3}, \quad \mathbf{B}_0 = \frac{2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}}{3}$$

Jika \mathbf{A} adalah sebuah vektor yang diketahui sedangkan \mathbf{r}_0 dan \mathbf{r} berturut-turut menunjukkan vektor kedudukan dari titik pangkal dan terminal vektor \mathbf{A} , maka $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ sejajar \mathbf{A} dan dengan demikian persamaan untuk \mathbf{A} adalah $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{A} = \mathbf{0}$.

$$\begin{array}{ll} \text{Persamaan vektor singgung satuan} & (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{T}_0 = \mathbf{0} \\ \text{Maka : Persamaan normal utama} & (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{N}_0 = \mathbf{0} \\ \text{Persamaan binormal} & (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{B}_0 = \mathbf{0} \end{array}$$

Dalam bentuk koordinat tegak-lurus, dengan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$ persamaan-persamaan diatas berturut-turut menjadi

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2/3}{2}, \quad \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2/3}{2}, \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2/3}{1}.$$

Persamaan-persamaan ini dapat pula dituliskan dalam bentuk parameter (lihat Soal 28, Bab 1).

24. Carilah persamaan-persamaan dalam bentuk vektor dan koordinat tegak-lurus untuk (a) bidang oskulasi, (b) bidang normal, dan (c) bidang yang meralat terhadap kurva dari Soal 22 dan 23 pada titik di mana $t = 1$.

(a) Bidang oskulasi adalah bidang yang memuat vektor singgung satuan dan normal utama. Jika \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari sebarang titik pada bidang ini dan \mathbf{r}_0 vektor kedudukan dari titik $t = 1$, maka $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ tegak-lurus \mathbf{B}_0 , yang adalah binormal di titik $t = 1$, yakni $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{B}_0 = 0$.

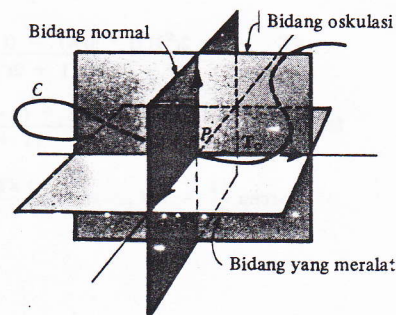
(b) Bidang normal adalah bidang yang tegak-lurus vektor singgung di titik yang ditinjau. Maka persamaan yang dikehendaki adalah $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{T}_0 = 0$.

(c) Bidang yang meralat adalah bidang yang tegak-lurus normal utama di titik yang ditinjau. Persamaan yang dikehendaki adalah $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_0 = 0$.

Dalam bentuk koordinat tegak-lurus, persamaan-persamaan (a), (b) dan (c) berturut-turut menjadi,

$$\begin{aligned} 2(x-1) - 2(y-1) + 1(z-2/3) &= 0, \\ 1(x-1) + 2(y-1) + 2(z-2/3) &= 0, \\ -2(x-1) - 1(y-1) + 2(z-2/3) &= 0. \end{aligned}$$

Gambar di samping memperlihatkan bidang-bidang oskulasi, normal dan yang meralat terhadap kurva C di titik P .



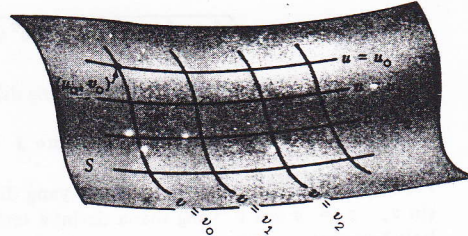
25. (a) Perlihatkan bahwa persamaan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ menyatakan sebuah permukaan.

(b) Perlihatkan bahwa $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ menyatakan sebuah vektor yang normal terhadap permukaan di atas.

(c) Tentukan normal satuan terhadap permukaan berikut dimana $a > 0$.

$$\mathbf{r} = a \cos u \sin v \mathbf{i} + a \sin u \sin v \mathbf{j} + a \cos v \mathbf{k}$$

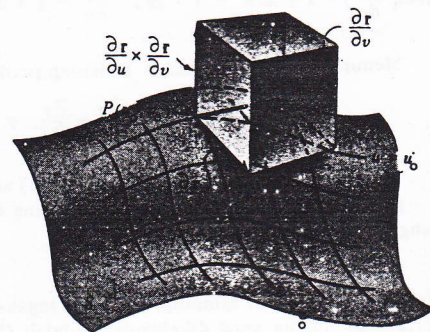
- (a) Jika u kita pandang berharga tetap, katakan u_0 , maka $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v)$ menyatakan sebuah kurva yang dapat dinyatakan oleh $u = u_0$. Begitu pula $u = u_1$ mendefinisikan kurva lainnya $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_1, v)$. Dengan demikian, bila u berubah maka $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ menyatakan sebuah kurva yang bergerak dalam ruang dan menghasilkan sebuah permukaan S . Maka $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ menyatakan permukaan S yang dihasilkan, seperti diperlihatkan dalam gambar di samping.



Kurva-kurva $u = u_0, u = u_1, \dots$ menyatakan kurva-kurva tertentu pada permukaan. Begitu pula $v = v_0, v = v_1, \dots$ menyatakan kurva-kurva pada permukaan.

Dengan memberikan harga-harga tertentu untuk u dan v , kita peroleh sebuah titik pada permukaan. Sehingga kurva $u = u_0$ dan $v = v_0$, akan berpotongan dan titik (u_0, v_0) dapat ditentukan pada permukaan. Dalam hal ini kita mengatakan bahwa (u, v) mendefinisikan *koordinat-koordinat kurvalinear* (curvilinear coordinates) di atas permukaan. Jika semua kurva $u = \text{konstan}$ dan $v = \text{konstan}$ saling tegak lurus pada setiap titik perpotongan, kita menyebut sistem koordinat kurvalinearnya *ortogonal*. Untuk pembahasan lebih lanjut mengenai koordinat-koordinat kurvalinear, lihat Bab 7.

- (b) Pandang sebuah titik P yang memiliki koordinat-koordinat (u_0, v_0) pada permukaan S , seperti diperlihatkan pada gambar di samping. Vektor $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ di P diperoleh dengan menurunkan \mathbf{r} terhadap u , dimana dipertahankan $v = \text{konstan} = v_0$. Dari teori kurva ruang diperoleh bahwa $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ di P menyatakan sebuah vektor singgung terhadap kurva $v = v_0$ di P seperti terlihat dalam gambar di samping. Begitu pula $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ di P menyatakan sebuah vektor singgung terhadap kurva $u = \text{konstan} = u_0$. Karena $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ dan $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ menyatakan vektor-vektor yang menyinggung kurva-kurva yang terletak pada permukaan S di P , maka dari sini diperoleh bahwa vektor-vektor ini menyinggung permukaan di P . Oleh karena itu, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ adalah sebuah vektor normal terhadap S di P .



$$(c) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = -a \sin u \sin v \mathbf{i} + a \cos u \sin v \mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} - a \sin v \mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \text{Maka} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin u \sin v & a \cos u \sin v & 0 \\ a \cos u \cos v & a \sin u \cos v & -a \sin v \end{vmatrix} \\ &= -a^2 \cos u \sin^2 v \mathbf{i} - a^2 \sin u \sin^2 v \mathbf{j} - a^2 \sin v \cos v \mathbf{k} \end{aligned}$$

menyatakan vektor normal terhadap permukaan di sebarang titik (u, v) .

Normal satuannya diperoleh dengan membagi $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ dengan besarnya, $|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}|$, yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} & \sqrt{a^4 \cos^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 u \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v} \\ &= \sqrt{a^4 (\cos^2 u + \sin^2 u) \sin^4 v + a^4 \sin^2 v \cos^2 v} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^2 v (\sin^2 v + \cos^2 v)} = \begin{cases} a^2 \sin v & \text{jika } \sin v > 0 \\ -a^2 \sin v & \text{jika } \sin v < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Jadi terdapat dua buah normal satuan yang diberikan oleh

$$\pm (\cos u \sin v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos v \mathbf{k}) = \pm \mathbf{n}$$

Perlu diperhatikan bahwa permukaan yang diberikan didefinisikan oleh $x = a \cos u \sin v$, $y = a \sin u \sin v$, $z = a \cos v$ yang mana darinya terlihat bahwa $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, yang adalah permukaan bola berjari a . Karena $\mathbf{r} = a\mathbf{n}$, maka dari sini diperoleh

$$\mathbf{n} = \cos u \sin v \mathbf{i} + \sin u \sin v \mathbf{j} + \cos v \mathbf{k}$$

yang adalah *normal satuan berarah keluar (outward drawn unit normal)* dari permukaan bola di titik (u, v) .

26. Carilah persamaan untuk bidang singgung terhadap permukaan $z = x^2 + y^2$ di titik $(1, -1, 2)$.

Misalkan $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$ adalah persamaan-persamaan parameter dari permukaan. Vektor kedudukan dari sebarang titik pada permukaan adalah

$$\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$$

Maka $\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right) = \mathbf{i} + 2u\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{j} + 2v\mathbf{k} = \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ di titik $(1, -1, 2)$, di mana $u = 1$ dan $v = -1$.

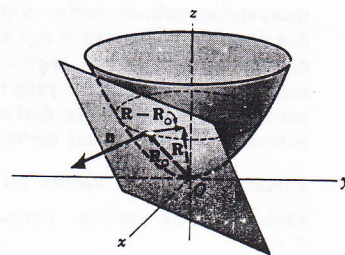
Menurut Soal 25, normal \mathbf{n} terhadap permukaan di titik ini adalah

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{k}) \times (\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Vektor kedudukan dari titik $(1, -1, 2)$ adalah $\mathbf{R}_0 = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Vektor kedudukan dari sebarang titik pada bidang adalah

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Maka dari gambar di samping, $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ tegak-lurus \mathbf{n} dan persamaan bidang yang dikehendaki adalah $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$ atau $[(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) - (\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k})] \cdot [-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}] = 0$ yakni $-2(x - 1) + 2(y + 1) + (z - 2) = 0$ atau $2x - 2y - z = 2$.



MEKANIKA

27. Perhatikan bahwa percepatan \mathbf{a} dari sebuah partikel yang bergerak sepanjang sebuah kurva ruang dengan kecepatan v diberikan oleh

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho} \mathbf{N}$$

di mana \mathbf{T} adalah sebarang vektor singgung satuan terhadap kurva ruang, \mathbf{N} vektor normal utama, dan ρ adalah jejari kelengkungan.

Kecepatan \mathbf{v} = besarnya v kali vektor satuan singgung \mathbf{T} atau $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$

Diferensialkan,
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt}$$

Tetapi dari Soal 18 (a),
$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} = \kappa \mathbf{N} \frac{ds}{dt} = \kappa v \mathbf{N} = \frac{v\mathbf{N}}{\rho}$$

Maka
$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\left(\frac{v\mathbf{N}}{\rho}\right) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

Hasil ini memperlihatkan bahwa komponen percepatan dalam arah singgung terhadap lintasan adalah dv/dt dan v^2/ρ adalah dalam arah normal terhadap lintasan. Komponen percepatan yang terakhir ini seringkali disebut *percepatan sentripetal*. Untuk hal khusus dari soal ini lihat Soal 12.

28. Bila \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari sebuah partikel bermassa m relatif terhadap titik O dan \mathbf{F} adalah gaya luar pada partikel, maka $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$ adalah torsi atau momen dari \mathbf{F} terhadap O . Perhatikan bahwa $\mathbf{M} = d\mathbf{H}/dt$, di mana $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ dan \mathbf{v} adalah kecepatan partikel.

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{menurut hukum Newton}$$

Tetapi,
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) &= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} \\ &= \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) + \mathbf{0} \end{aligned}$$

jadi
$$\mathbf{M} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$$

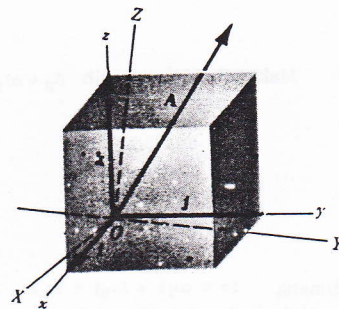
Perhatikan bahwa hasil ini berlaku baik untuk m konstan atau tidak. \mathbf{H} disebut *momentum-sudut*. Hasil ini menyatakan bahwa laju perubahan momentum sudut terhadap waktu sama dengan torsi.

Hasil ini dapat diperluas dengan mudah untuk suatu sistem dari n -buah partikel yang masing-masingnya memiliki massa m_1, m_2, \dots, m_n dan vektor-vektor kedudukan $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ dengan gaya-gaya luar $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$. Untuk hal ini, $\mathbf{H} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{v}_k$ adalah momentum sudut total $\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k$ torsi total, dan hasilnya adalah $\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{H}}{dt}$ seperti yang sebelumnya.

29. Seorang pengamat yang berada di titik asal O dari suatu sistem koordinat xyz , mengamati sebuah vektor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ dan menghitung turunannya terhadap waktu sebagai $\frac{dA_1}{dt}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt}\mathbf{k}$. Kemudian, ia menyadari bahwa ia dan sistem koordinatnya sebenarnya sedang berotasi terhadap sistem koordinat XYZ yang berada dalam keadaan diam dengan titik asalnya juga di O . Ia lalu bertanya, 'Bagaimana pernyataan turunan terhadap waktu dari vektor \mathbf{A} bagi seorang pengamat yang berada dalam keadaan diam terhadap sistem koordinat XYZ ?'

- (a) Jika $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f$ dan $\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m$ masing-masing menyatakan turunan terhadap waktu dari \mathbf{A} terhadap sistem yang diam dan yang bergerak, perlihatkan bahwa terdapat sebuah besaran vektor $\boldsymbol{\omega}$ sehingga

$$\left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_f = \left.\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right|_m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$



- (b) Misalkan D_f dan D_m masing-masing adalah simbol turunan terhadap waktu dalam sistem koordinat diam dan yang bergerak. Perhatikan ekuivalensi operator

$$D_f \equiv D_m + \boldsymbol{\omega} \times$$

- (a) Bagi pengamat diam, vektor-vektor satuan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sebenarnya berubah terhadap waktu. Oleh karena itu, turunan terhadap waktu dari vektor \mathbf{A} akan dihitungnya sebagai

$$(1) \quad \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dA_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dA_3}{dt} \mathbf{k} + A_1 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad \text{yakni}$$

$$(2) \quad \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_f = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_m + A_1 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Karena \mathbf{i} sebuah vektor satuan, maka $d\mathbf{i}/dt$ tegak-lurus \mathbf{i} (lihat Soal 9) dan dengan demikian harus terletak dalam bidang dari \mathbf{j} dan \mathbf{k} . Jadi

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1 \mathbf{j} + \alpha_2 \mathbf{k}$$

Begitu pula,

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3 \mathbf{k} + \alpha_4 \mathbf{i}$$

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha_5 \mathbf{i} + \alpha_6 \mathbf{j}$$

Karena $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$, maka turunannya menghasilkan $\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} = 0$. Tetapi $\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_4$ dari (4), dan $\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \alpha_1$ dari (3) jadi $\alpha_4 = -\alpha_1$.

Dengan cara yang sama dari $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{i} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{k} = 0$ maka $\alpha_5 = -\alpha_2$; dari

$\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$, $\mathbf{j} \cdot \frac{d\mathbf{k}}{dt} + \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = 0$ maka $\alpha_6 = -\alpha_3$.

Jadi $\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1 \mathbf{j} + \alpha_2 \mathbf{k}$, $\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3 \mathbf{k} - \alpha_1 \mathbf{i}$, $\frac{d\mathbf{k}}{dt} = -\alpha_2 \mathbf{i} - \alpha_3 \mathbf{j}$ dan

$$A_1 \frac{d\mathbf{i}}{dt} + A_2 \frac{d\mathbf{j}}{dt} + A_3 \frac{d\mathbf{k}}{dt} = (-\alpha_1 A_2 - \alpha_2 A_3) \mathbf{i} + (\alpha_1 A_1 - \alpha_3 A_3) \mathbf{j} + (\alpha_2 A_1 + \alpha_3 A_2) \mathbf{k}$$

yang dapat dituliskan sebagai,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

Maka bila kita memilih $\alpha_3 = \omega_1$, $-\alpha_2 = \omega_2$, $\alpha_1 = \omega_3$ determinannya menjadi

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$$

dimana $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} + \omega_2 \mathbf{j} + \omega_3 \mathbf{k}$. Besaran $\boldsymbol{\omega}$ adalah vektor kecepatan sudut dari sistem yang bergerak terhadap sistem yang diam.

- (b) Menurut definisi $D_f \mathbf{A} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_f$ = turunan dalam sistem yang diam.

$$D_m \mathbf{A} = \left. \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right|_m = \text{turunan dalam sistem yang bergerak.}$$

Dari (a), $D_f \mathbf{A} = D_m \mathbf{A} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} = (D_m + \boldsymbol{\omega} \times) \mathbf{A}$

yang memperlihatkan ekuivalensi operator $D_f \equiv D_m + \boldsymbol{\omega} \times$.

30. Tentukan (a) kecepatan dan (b) percepatan dari sebuah benda yang bergerak bila dilihat oleh kedua pengamat dalam Soal 29.

(a) Misalkan vektor \mathbf{A} dalam Soal 29 adalah vektor kedudukan \mathbf{r} dari partikel. Dengan mempergunakan notasi operator dari Soal 29 (b), kita peroleh

$$(1) \quad D_f \mathbf{r} = (D_m + \boldsymbol{\omega} \times) \mathbf{r} = D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

Tetapi $D_f \mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|f}$ = kecepatan partikel relatif terhadap sistem yang diam.

$D_m \mathbf{r} = \mathbf{v}_{p|m}$ = kecepatan partikel relatif terhadap sistem yang bergerak.

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{v}_{m|f}$ = kecepatan sistem yang bergerak relatif terhadap sistem yang diam.

Maka (1) dapat dituliskan sebagai,

$$(2) \quad \mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

atau dalam notasi yang diusulkan

$$(3) \quad \mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \mathbf{v}_{m|f}$$

Perhatikan bahwa peranan dari pengamat diam dan yang bergerak tentu saja dapat bergantian. Jadi pengamat diam dapat berpikir bahwa dirinya sedang bergerak terhadap pengamat lainnya. Dalam hal ini kita harus mengubah indeks-bawah (subscript) m dan f dan juga mengubah $\boldsymbol{\omega}$ menjadi $-\boldsymbol{\omega}$ karena rotasi relatif dibalik. Apabila ini dilakukan, (2) menjadi

$$\mathbf{v}_{p|m} = \mathbf{v}_{p|f} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{atau} \quad \mathbf{v}_{p|f} = \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

sehingga hasilnya berlaku untuk tiap-tiap pengamat.

- (b) Percepatan partikel sebagaimana ditentukan oleh pengamat diam di O adalah $D_f^2 \mathbf{r} = D_f(D_f \mathbf{r})$. Ambillah D_f dari kedua ruasnya (1), dan pergunakan ekivalen operator yang dibuktikan dalam Soal 29(b), maka

$$\begin{aligned} D_f(D_f \mathbf{r}) &= D_f(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= (D_m + \boldsymbol{\omega} \times)(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= D_m(D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times (D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= D_m^2 \mathbf{r} + D_m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \end{aligned}$$

$$\text{atau} \quad D_f^2 \mathbf{r} = D_m^2 \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times D_m \mathbf{r} + (D_m \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Misalkan $\mathbf{a}_{p|f} = D_f^2 \mathbf{r}$ = percepatan partikel relatif terhadap sistem yang diam.

$\mathbf{a}_{p|m} = D_m^2 \mathbf{r}$ = percepatan partikel relatif terhadap sistem yang bergerak.

Maka $\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega} \times D_m \mathbf{r} + (D_m \boldsymbol{\omega}) \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$
= percepatan sistem yang bergerak terhadap yang diam

dan kita dapat menuliskan $\mathbf{a}_{p|f} = \mathbf{a}_{p|m} + \mathbf{a}_{m|f}$.

Dalam kebanyakan hal yang penting, $\boldsymbol{\omega}$ adalah sebuah vektor konstan, yakni rotasinya berlangsung dengan kecepatan sudut yang konstan. Maka $D_m \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ dan

$$\mathbf{a}_{m|f} = 2\boldsymbol{\omega} \times D_m \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{p|m} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

Besaran $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{p|m}$ disebut *percepatan Coriolis* dan $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ disebut *percepatan sentripetal*.

Hukum-hukum Newton hanyalah berlaku terbatas dalam sistem-sistem inersial, yakni sistem-sistem yang diam atau bergerak dengan kecepatan tetap relatif terhadap suatu sistem yang diam. Bumi tidaklah berupa sebuah sistem inersial dan ini disebabkan karena hadirnya apa yang disebut gaya-gaya tambahan 'khayal' (Coriolis, dan sebagainya) yang mana harus diperhitungkan. Jika massa sebuah partikel adalah sebuah konstanta M , maka hukum Newton kedua menjadi,

$$(4) \quad M D_m^2 \mathbf{r} = \mathbf{F} - 2M(\boldsymbol{\omega} \times D_m \mathbf{r}) - M[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]$$

di mana D_m menyatakan d/dt sebagaimana dihitung oleh seorang pengamat di atas bumi, dan \mathbf{F} adalah

gaya resultan dari semua gaya-gaya nyata yang diukur oleh pengamat ini. Kedua suku terakhir dalam ruas-kanan dari (4) sangat kecil sekali sehingga dalam kebanyakan hal diabaikan dan tak dipergunakan dalam praktek.

Teori relativitas yang dikemukakan Einstein telah mengubah secara radikal konsep gerak-mutlak yang dihasilkan oleh konsep-konsep Newton dan membawa perbaikan terhadap hukum-hukum Newton.

Soal-soal Tambahan

31. Jika $\mathbf{R} = e^{-t}\mathbf{i} + \ln(t^2 + 1)\mathbf{j} - \tan t \mathbf{k}$, carilah (a) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$, (b) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$, (c) $\left| \frac{d\mathbf{R}}{dt} \right|$, (d) $\left| \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} \right|$ pada $t = 0$
- Jawab. (a) $-\mathbf{i} - \mathbf{k}$, (b) $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, (c) $\sqrt{2}$, (d) $\sqrt{5}$
32. Carilah kecepatan dan percepatan sebuah partikel yang bergerak sepanjang kurva $x = 2\sin 3t$, $y = 2\cos 3t$, $z = 8t$ pada sebarang saat $t > 0$. Carilah besarnya kecepatan dan percepatan.
- Jawab. $\mathbf{v} = 6\cos 3t \mathbf{i} - 6\sin 3t \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$, $\mathbf{a} = -18\sin 3t \mathbf{i} - 18\cos 3t \mathbf{j}$, $|\mathbf{v}| = 10$, $|\mathbf{a}| = 18$
33. Carilah vektor singgung satuan di sebarang titik pada kurva $x = a \cos \omega t$, $y = a \sin \omega t$, $z = bt$ di mana a , b dan ω adalah konstanta-konstanta. Jawab. $\frac{-a\omega \sin \omega t \mathbf{i} + a\omega \cos \omega t \mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{a^2\omega^2 + b^2}}$
34. Jika $\mathbf{A} = t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (2t+1)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = (2t-3)\mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$, carilah (a) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, (b) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$, (c) $\frac{d}{dt}|\mathbf{A} + \mathbf{B}|$, (d) $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt})$ pada $t=1$. Jawab. (a) -6 , (b) $7\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, (c) 1 , (d) $\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
35. Jika $\mathbf{A} = \sin u \mathbf{i} + \cos u \mathbf{j} + u \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \cos u \mathbf{i} - \sin u \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, dan $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, carilah $\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))$ pada $u=0$. Jawab. $7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
36. Carilah $\frac{d}{ds}(\mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{ds} - \frac{d\mathbf{A}}{ds} \cdot \mathbf{B})$ jika \mathbf{A} dan \mathbf{B} adalah fungsi-fungsi diferensiabel.
- Jawab. $\mathbf{A} \cdot \frac{d^2\mathbf{B}}{ds^2} - \frac{d^2\mathbf{A}}{ds^2} \cdot \mathbf{B}$
37. Jika $\mathbf{A}(t) = 3t^2\mathbf{i} - (t+4)\mathbf{j} + (t^2-2t)\mathbf{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = \sin t \mathbf{i} + 3e^{-t}\mathbf{j} - 3\cos t \mathbf{k}$, carilah $\frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ pada $t=0$. Jawab. $-30\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 20\mathbf{k}$
38. Jika $\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = 6t\mathbf{i} - 24t^2\mathbf{j} + 4\sin t \mathbf{k}$, carilah \mathbf{A} bila pada saat $t=0$, diketahui bahwa $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ dan $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$ at $t=0$. Jawab. $\mathbf{A} = (t^3 - t + 2)\mathbf{i} + (1 - 2t^4)\mathbf{j} + (t - 4\sin t)\mathbf{k}$
39. Perhatikan bahwa $\mathbf{r} = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$, di mana C_1 dan C_2 adalah vektor-vektor konstan, adalah solusi dari persamaan diferensial $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\frac{d\mathbf{r}}{dt} + 5\mathbf{r} = \mathbf{0}$.
40. Perhatikan bahwa solusi umum dari persamaan diferensial $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega^2\mathbf{r} = \mathbf{0}$, di mana α dan ω adalah konstanta-konstanta, adalah
- (a) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(C_1 e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega^2} t})$ jika $\alpha^2 - \omega^2 > 0$
- (b) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(C_1 \sin \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t + C_2 \cos \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} t)$ jika $\alpha^2 - \omega^2 < 0$.

(c) $\mathbf{r} = e^{-\alpha t}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$ jika $\alpha^2 - \omega^2 = 0$,

di mana \mathbf{C}_1 dan \mathbf{C}_2 adalah konstanta-konstanta sebarang.

41. Pecahkan (a) $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - 4 \frac{d\mathbf{r}}{dt} - 5\mathbf{r} = \mathbf{0}$, (b) $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 2 \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{r} = \mathbf{0}$, (c) $\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + 4\mathbf{r} = \mathbf{0}$.

Jawab. (a) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 e^{5t} + \mathbf{C}_2 e^{-t}$, (b) $\mathbf{r} = e^{-t}(\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 t)$, (c) $\mathbf{r} = \mathbf{C}_1 \cos 2t + \mathbf{C}_2 \sin 2t$

42. Pecahkan. $\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{X}$, $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = -\mathbf{Y}$. Jawab. $\mathbf{X} = \mathbf{C}_1 \cos t + \mathbf{C}_2 \sin t$, $\mathbf{Y} = \mathbf{C}_1 \sin t - \mathbf{C}_2 \cos t$

43. Jika $\mathbf{A} = \cos xy \mathbf{i} + (3xy - 2x^2)\mathbf{j} - (3x + 2y)\mathbf{k}$, carilah $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x}$.

Jawab. $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} = -y \sin xy \mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} = -x \sin xy \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$,
 $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} = -y^2 \cos xy \mathbf{i} - 4\mathbf{j}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} = -x^2 \cos xy \mathbf{i}$, $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y \partial x} = -(xy \cos xy + \sin xy)\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

44. Jika $\mathbf{A} = x^2 y z \mathbf{i} - 2xz^3 \mathbf{j} + xz^2 \mathbf{k}$ dan $\mathbf{B} = 2z \mathbf{i} + y \mathbf{j} - x^2 \mathbf{k}$, carilah

$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ di titik $(1, 0, -2)$. Jawab. $-4\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

45. Jika \mathbf{C}_1 dan \mathbf{C}_2 adalah vektor-vektor konstan dan λ sebuah skalar konstan, perhatikan bahwa $\mathbf{H} = e^{-\lambda x} (\mathbf{C}_1 \sin \lambda y + \mathbf{C}_2 \cos \lambda y)$ memenuhi persamaan diferensial parsial $\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial y^2} = \mathbf{0}$.

46. Buktikan bahwa $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{i\omega(t - r/c)}}{r}$, di mana \mathbf{p}_0 sebuah vektor konstan, ω dan c skalar-skalarnya konstan dan $i = \sqrt{-1}$, memenuhi persamaan $\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$. Hasil ini penting dalam teori elektromagnetik.

GEOMETRI DIFERENSIAL

47. Carilah (a) vektor singgung satuan \mathbf{T} , (b) kelengkungan K , (c) normal utama \mathbf{N} , (d) binormal \mathbf{B} , dan (e) torsi τ untuk kurva ruang $x = t - t^3/3$, $y = t^2$, $z = t + t^3/3$.

Jawab. (a) $\mathbf{T} = \frac{(1 - t^2)\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (1 + t^2)\mathbf{k}}{\sqrt{2(1 + t^2)}}$, (c) $\mathbf{N} = -\frac{2t}{1 + t^2}\mathbf{i} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}\mathbf{j}$,
 (b) $K = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$, (d) $\mathbf{B} = \frac{(t^2 - 1)\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}}{\sqrt{2(1 + t^2)}}$, (e) $\tau = \frac{1}{(1 + t^2)^2}$

48. Sebuah kurva-ruang didefinisikan dalam parameter panjang busur s melalui persamaan-persamaan

$$x = \arctan s, \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{2} \ln(s^2 + 1), \quad z = s - \arctan s$$

carilah (a) \mathbf{T} , (b) \mathbf{N} , (c) \mathbf{B} , (d) K , (e) τ , (f) ρ , (g) σ .

Jawab. (a) $\mathbf{T} = \frac{\mathbf{i} + \sqrt{2}s\mathbf{j} + s^2\mathbf{k}}{s^2 + 1}$, (d) $K = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 1}$,
 (b) $\mathbf{N} = \frac{-\sqrt{2}s\mathbf{i} + (1 - s^2)\mathbf{j} + \sqrt{2}s\mathbf{k}}{s^2 + 1}$, (e) $\tau = \frac{\sqrt{2}}{s^2 + 1}$, (g) $\sigma = \frac{s^2 + 1}{\sqrt{2}}$,
 (c) $\mathbf{B} = \frac{s^2\mathbf{i} - \sqrt{2}s\mathbf{j} + \mathbf{k}}{s^2 + 1}$, (f) $\rho = \frac{s^2 + 1}{\sqrt{2}}$

49. Carilah K dan τ untuk kurva ruang $x = t, y = t^2, z = t^3$ yang disebut kubik terbelit (twisted cubic).

$$\text{Jawab. } \kappa = \frac{2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}}{(9t^4 + 4t^2 + 1)^{3/2}}, \quad \tau = \frac{3}{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

50. Perhatikan bahwa untuk sebuah kurva ruang torsi $\tau = 0$.

51. Perhatikan bahwa jejari kelengkungan dari sebuah kurva bidang dengan persamaan-persamaan

$$y = f(x), \quad z = 0,$$

$$\text{yakni kurva dalam bidang } xy \text{ diberikan oleh } \rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}.$$

52. Carilah kelengkungan dan jejari kelengkungan dari kurva dengan vektor kedudukan $\mathbf{r} = a \cos u \mathbf{i} + b \sin u \mathbf{j}$, di mana a dan b adalah konstanta-konstanta positif. Interpretasikan kasus di mana $a = b$.

$$\text{Jawab. } \kappa = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}} = \frac{1}{\rho}; \text{ jika } a = b, \text{ maka kurva yang ditinjau ini, yang mana adalah sebuah elips, menjadi sebuah lingkaran berjejari } a \text{ dan jejari kelengkungannya } \rho = a.$$

53. Perhatikan bahwa rumus Frenet-Serret dapat dituliskan dalam bentuk $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{T}$, $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{N}$, $\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}$ dan tentukan $\boldsymbol{\omega}$.

$$\text{Jawab. } \boldsymbol{\omega} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$$

54. Buktikan bahwa kelengkungan dari kurva ruang $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ diberikan secara numerik oleh $\kappa = \frac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, di mana tanda titik menyatakan turunan terhadap t .

55. (a) Buktikan bahwa $\tau = \frac{\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}$ untuk kurva ruang $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

$$(b) \text{ Jika parameter } t \text{ adalah panjang busur } s, \text{ perhatikan bahwa } \tau = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{(d^2\mathbf{r}/ds^2)^2}.$$

56. Jika $\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, perhatikan bahwa $\kappa = \frac{Q}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$, $\tau = \frac{\mathbf{Q} \cdot \ddot{\mathbf{r}}}{Q^2}$.

57. Carilah K dan τ untuk kurva ruang $x = \theta - \sin \theta, y = 1 - \cos \theta, z = 4 \sin(\theta/2)$.

$$\text{Jawab. } \kappa = \frac{1}{8} \sqrt{6 - 2 \cos \theta}, \quad \tau = \frac{(3 + \cos \theta) \cos \theta/2 + 2 \sin \theta \sin \theta/2}{12 \cos \theta - 4}$$

58. Carilah torsi dari kurva $x = \frac{2t+1}{t-1}, y = \frac{t^2}{t-1}, z = t+2$. Jelaskan jawab anda.

$$\text{Jawab. } \tau = 0. \text{ Kurvanya terletak dalam bidang } x - 3y + 3z = 5.$$

59. Perhatikan bahwa persamaan dari garis singgung, normal dan binormal terhadap kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ pada titik $t = t_0$ dapat dituliskan berturut-turut sebagai $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{T}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{N}_0$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \mathbf{B}_0$, di mana t adalah sebuah parameter.

60. Carilah persamaan untuk garis (a) singgung, (b) normal utama, (c) binormal terhadap kurva $x = 3 \cos t, y = 3 \sin t, z = 4t$ pada titik di mana $t = \pi$.

$$\text{Jawab. (a) Garis singgung: } \mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{k} + t(-\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}) \text{ atau } x = -3, y = -\frac{3}{5}t, z = 4\pi + \frac{4}{5}t.$$

$$(b) \text{ Normal: } \mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t\mathbf{i} \text{ atau } x = -3 + t, y = 4\pi, z = 0.$$

$$(c) \text{ Binormal: } \mathbf{r} = -3\mathbf{i} + 4\pi\mathbf{j} + t(\frac{4}{5}\mathbf{j} + \frac{3}{5}\mathbf{k}) \text{ atau } x = -3, y = 4\pi + \frac{4}{5}t, z = \frac{3}{5}t.$$

61. Carilah persamaan (a) bidang oskulasi, (b) bidang normal dan (c) bidang yang meralat kurva $x = 3t - t^3$, $y = 3t^2$, $z = 3t + t^3$ pada titik di mana $t = 1$. Jawab. (a) $y - z + 1 = 0$, (b) $y + z - 7 = 0$, (c) $x = 2$.

62. (a) Perlihatkan bahwa diferensial dari panjang busur pada kurva $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ diberikan oleh

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

$$\text{di mana } E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2.$$

- (b) Buktikan bahwa syarat perlu dan cukup agar sistem koordinat kurvalinear u, v ortogonal adalah $F \equiv 0$.

63. Carilah persamaan bidang singgung terhadap permukaan $z = xy$ di titik $(2, 3, 6)$. Jawab. $3x + 2y - z = 6$

64. Carilah persamaan untuk bidang singgung dan garis normal terhadap permukaan $4z = x^2 - y^2$ di titik $(3, 1, 2)$. Jawab. $3x - y - 2z = 4$; $x = 3t + 3$, $y = 1 - t$, $z = 2 - 2t$

65. Buktikan bahwa normal satuan terhadap permukaan $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ adalah $\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}$, di mana E, F dan G didefinisikan seperti dalam Soal 62.

MEKANIKA

66. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $\mathbf{r} = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 + 4t)\mathbf{j} + (8t^2 - 3t^3)\mathbf{k}$, di mana t adalah waktu. Carilah besarnya komponen-komponen tangensial dan normal dari percepatannya bila $t = 2$.

Jawab. Tangensial, 16; normal, $2\sqrt{73}$

67. Jika kecepatan sebuah partikel \mathbf{v} dan percepatannya \mathbf{a} sepanjang sebuah kurva ruang, buktikan bahwa

$$\text{jejari kelengkungan dari lintasannya diberikan secara numerik oleh } \rho = \frac{v^3}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}.$$

68. Sebuah obyek tertarik menuju sebuah titik tetap O dengan gaya $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, yang disebut gaya sentral, (*central force*), di mana \mathbf{r} adalah vektor kedudukan dari obyek relatif terhadap O . Perlihatkan bahwa $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h}$ di mana \mathbf{h} sebuah vektor konstan. Buktikan bahwa momentum sudutnya konstan.

69. Buktikan bahwa vektor percepatan dari sebuah partikel yang bergerak sepanjang sebuah kurva selalu terletak dalam bidang oskulasi.

70. (a) Carilah percepatan sebuah partikel yang bergerak dalam bidang xy dinyatakan dalam koordinat-koordinat polar (ρ, ϕ)

- (b) Apa komponen-komponen percepatan yang sejajar dan tegak lurus ρ ?

$$\text{Jawab. (a) } \ddot{\mathbf{r}} = [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \cos \phi - (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \sin \phi] \mathbf{i} \\ + [(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \sin \phi + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \cos \phi] \mathbf{j}$$

$$(b) \ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2, \quad \rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}$$